

Cagniard-De Hoop 法による 2次元波動方程式の基本解の導出

S.Hirano

概要

x - z 平面 ($= \mathbb{R}^2$) における 2次元波動方程式の基本解, 即ち放射条件を伴う初期値問題:

$$\begin{cases} \partial_t^2 G - \beta^2 (\partial_x^2 + \partial_z^2) G = \delta(x) \delta(z) \delta(t), & t \geq 0 \\ G = 0, & |x|, |z| \rightarrow \infty \\ G = \partial_t G = 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1)$$

の解 $G(x, z, t)$ を考えましょう. ここで $\delta(\cdot)$ は Dirac の delta 関数です.

Cagniard-De Hoop 法は上述の解を求める形式的な手法で, 地球物理学者 Cagniard [1939] が提唱し, 物理学者 De Hoop [1960] によって改良されました. この手法は, 2層構造からなる媒質の問題などにも拡張可能性を持ちます. ここでは全無限均質媒質 ($\beta = \text{一定}$) に話を絞り, 地震学者 Aki & Richards [1980] の記述に基づき, 以下の流れに沿って紹介します.

1. 式 (1) を x について Fourier 変換, t について Laplace 変換し, z についての 2階常微分方程式に帰着
2. Fourier 逆変換により, 常微分方程式の解を Fourier 積分表示
3. Fourier 変数と Laplace 変数の比として複素変数 p を導入し, Fourier 積分を p についての複素積分に帰着
4. p についての複素積分を直ちに Laplace 逆変換可能な表現に帰着し, 解を求める
5. その操作の妥当性を, 複素積分の経路独立性を用いて積分経路を曲げることで検証

Step 1

$k \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}_+$ として, 変数 x について Fourier 変換

$$G(x, z, t) \mapsto G(k, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, z, t) e^{-ikx} dx, \quad (2)$$

および変数 t について Laplace 変換¹

$$G(k, z, t) \mapsto G(k, z, s) = \int_0^{+\infty} G(k, z, t) e^{-st} dt, \quad (3)$$

を施し, 波動方程式 (1) を以下の常微分方程式に帰着します:

$$\partial_z^2 G(k, z, s) = \left(k^2 + \frac{s^2}{\beta^2} \right) G(k, z, s) - \frac{\delta(z)}{\beta^2}, \quad (4)$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} G(k, z, s) = 0. \quad (5)$$

Step 2

式 (4) の両辺を $-\epsilon < z < +\epsilon$ で積分すると

$$[\partial_z G]_{-\epsilon}^{+\epsilon} = \left(k^2 + \frac{s^2}{\beta^2} \right) \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} G dz - \frac{1}{\beta^2} \quad (6)$$

となりますが, ここでは $\epsilon \rightarrow 0$ で右辺の積分の値がゼロとなるような解のクラスを考えます. というのも, 仮に $|z| < \epsilon$ の範囲で $G \propto \delta(z)$ のような関数であれば積分は非ゼロとなりますが, それでは明らかに $|z| < \epsilon$ の範囲で式 (4) が満たされません. よって G は $z = 0$ において z 微分に関する不連続性

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ \partial_z G(k, +\epsilon, s) - \partial_z G(k, -\epsilon, s) \} = -\frac{1}{\beta^2}, \quad (7)$$

を持ち, この条件および放射条件 (5) より, 常微分方程式 (4) の解は以下で表現されることが分かります:

$$G(k, z, s) = \frac{1}{2\beta^2 s \eta} e^{-s\eta|z|}, \quad (8)$$

ただし η は以下のように定義されます:

$$\eta := \sqrt{\beta^{-2} + (k/s)^2} > 0. \quad (9)$$

¹Fourier 変換を用いる流儀もあります. その場合は後に現われる複素積分経路の折り曲げの作法が異なり, Laplace 変換の方がやや簡単であることから, 本稿ではこちらを用います. なお, Laplace 変数 s を正の実数に限定するのも後の都合によるものです.

なお、後に η は複素数に拡張されますが、その場合には常に実部が正であるとします。

この時点で、 $G(k, z, s)$ は k の偶関数ですから、これを k について Fourier 逆変換すると、

$$\begin{aligned} G(x, z, s) &= \frac{1}{2\pi\beta^2} \Re \int_{-\infty}^0 \frac{1}{s\eta} e^{+ikx - s\eta|z|} dk \\ &= \frac{1}{2\pi\beta^2} \Im \int_{-\infty}^0 \frac{i}{s\eta} e^{+ikx - s\eta|z|} dk \end{aligned} \quad (10)$$

が得られます。ただし \Re および \Im はそれぞれ、複素数の実部および虚部を取る記号です。

Step 3

複素変数 p を

$$p := -ik/s \quad (11)$$

によって定めると、

$$\eta = \sqrt{\beta^{-2} - p^2}, \quad (12)$$

$$\partial_k p = -\frac{i}{s} \quad (13)$$

となり、これらにより式 (10) は

$$G(x, z, s) = \frac{1}{2\pi\beta^2} \Im \int_0^{i\infty} \frac{1}{\eta} e^{-s(px + \eta|z|)} dp \quad (14)$$

となります。この時点では、 p は純虚数です。

Step 4

式 (14) 右辺の被積分関数を、一般の複素数 p についての関数と見なすことにします。この被積分関数が正則でない領域は、 $\eta = 0$ によって与えられる実軸上の 2 点近傍です。そこで、実軸上 $p < -1/\beta$ および $+1/\beta < p$ の 2 つの領域を branch cut として Riemann 面を定めれば (Figure 1 赤波線)、積分経路はこの branch cut にかからない限り任意に曲げることが出来るでしょう。さて、後の Step 5 で検証するように、ここでもし仮に被積分関数の指数に含まれる

$$\tau := px + \eta|z| \quad (15)$$

が非負の実数全体をとるように積分経路を曲げることが出来たとすれば、式 (14) は、

$$G(x, z, s) = \frac{1}{2\pi\beta^2} \int_0^{+\infty} \Im \left\{ \frac{\partial_\tau p}{\eta} \right\} e^{-s\tau} d\tau \quad (16)$$

となり, これは Laplace 変換の定義 (3) そのものですから, τ を時間変数 t とみなして直ちに Laplace 逆変換が可能で,

$$G(x, z, t) = \frac{1}{2\pi\beta^2} \mathfrak{S} \left\{ \frac{\partial_t p}{\eta} \right\} \quad (17)$$

が得られます. なお,

$$t = px + \eta |z| \quad (18)$$

より, $R^2 = x^2 + z^2$ と置くと

$$p = \begin{cases} \frac{xt - \operatorname{sgn}(x) |z| \sqrt{(R/\beta)^2 - t^2}}{R^2} & (\text{for } t < R/\beta) \\ \frac{xt + i |z| \sqrt{t^2 - (R/\beta)^2}}{R^2} & (\text{for } t > R/\beta), \end{cases} \quad (19)$$

です (Figure 1 青線)² から, $H(\cdot)$ を Heaviside 関数として

$$\frac{1}{2\pi\beta^2} \mathfrak{S} \left\{ \frac{\partial_t p}{\eta} \right\} = \frac{1}{2\pi\beta^2} \frac{H(t - R/\beta)}{\sqrt{t^2 - (R/\beta)^2}} \quad (20)$$

が得られ, これはまさによく知られた 2次元波動方程式の Green 関数です.

Step 5

式 (18) で定まる t が非負の実数全体を取るように, 式 (14) の積分経路を曲げる具体的方法を考えましょう. 実際には, そのような t の動きと, p が原点から虚軸上正の無限大まで動くこととは相容れないことがわかります. というのも, 式 (18) および (19) より明らかに,

$$p = 0 \Leftrightarrow t = |z|/\beta, \quad (21)$$

$$p = +i\infty \Leftrightarrow t = +\infty + i\infty, \quad (22)$$

$$t = 0 \Leftrightarrow p = -|z|/(\beta R), \quad (23)$$

$$t = +\infty \Leftrightarrow p = +\infty + i\infty \quad (24)$$

となって, 積分経路の始点も終点も一致しません. これを解決するために, 因果律と Jordan の補題を用います.

²場合分けによって途中の符号が反転しているのは, 式 (18) が p の 2次方程式であり, その解のうち $p = 0$ を通り, かつ虚部が正であるものを採用したためです. 後述の積分経路を作り出すためにはこうしなければならぬことがわかります.

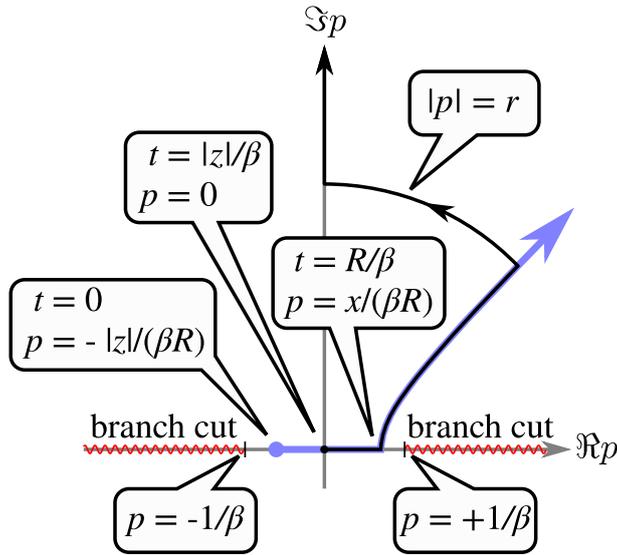


Figure 1: $x > 0$ の場合の、複素 p 平面上の積分経路. $x < 0$ の場合は左右が反転する.

まず因果律を考えると、時刻 $t = 0$ で原点から射出された波は $t < R/\beta$ の範囲で影響を持たないことから、当然 $t < |z|/\beta$ でも影響を持たないはずです. 従って式 (16) の積分は、

$$\Im \int_0^{+\infty} \frac{\partial_\tau p}{\eta} e^{-s\tau} d\tau = \Im \int_{|z|/\beta}^{+\infty} \frac{\partial_\tau p}{\eta} e^{-s\tau} d\tau \quad (25)$$

とすることができ、関係式 (21) より、これは p 平面上原点を始点とする積分経路と等価です.

次に Jordan の補題を用いるための積分経路を考えます. 式 (19) より、 p は $t = R/\beta$ において実軸を離れ、以後は複素 p 平面第 1 象限 ($x < 0$ の場合は第 2 象限) 内の双曲線上を無限遠方に向かいます. そこで正の実数 r を用いて、 p についての積分経路を

1. $|p| = r$ となるまでは双曲線上を移動する
2. $|p| = r$ になったら、半径 r の円弧状を虚軸上の点 $p = ir$ まで移動する
3. 以後は虚軸上を $+i\infty$ に向かって移動する
4. $r \rightarrow \infty$ の極限を取る

という操作 (Figure 1 黒線) によって定めれば、最後の極限操作と Jordan の補題によって円弧状の積分はゼロとなるので、

- 任意の時刻において関係式 (19) が成立し、
- p についての積分経路の終着点は $+i\infty$

という要請を満たすことができます.

References

- [1] Aki, K. & Richards, P.G., Quantitative Seismology, University Science Books, Herndon, VA 1980.
- [2] Cagniard, L., Réflexion et réfraction des ondes sismiques progressives, Gauthier-Villars, Paris 1939.
- [3] De Hoop, A.T., A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems. Applied Scientific Research, B8 (1960): 349-356.